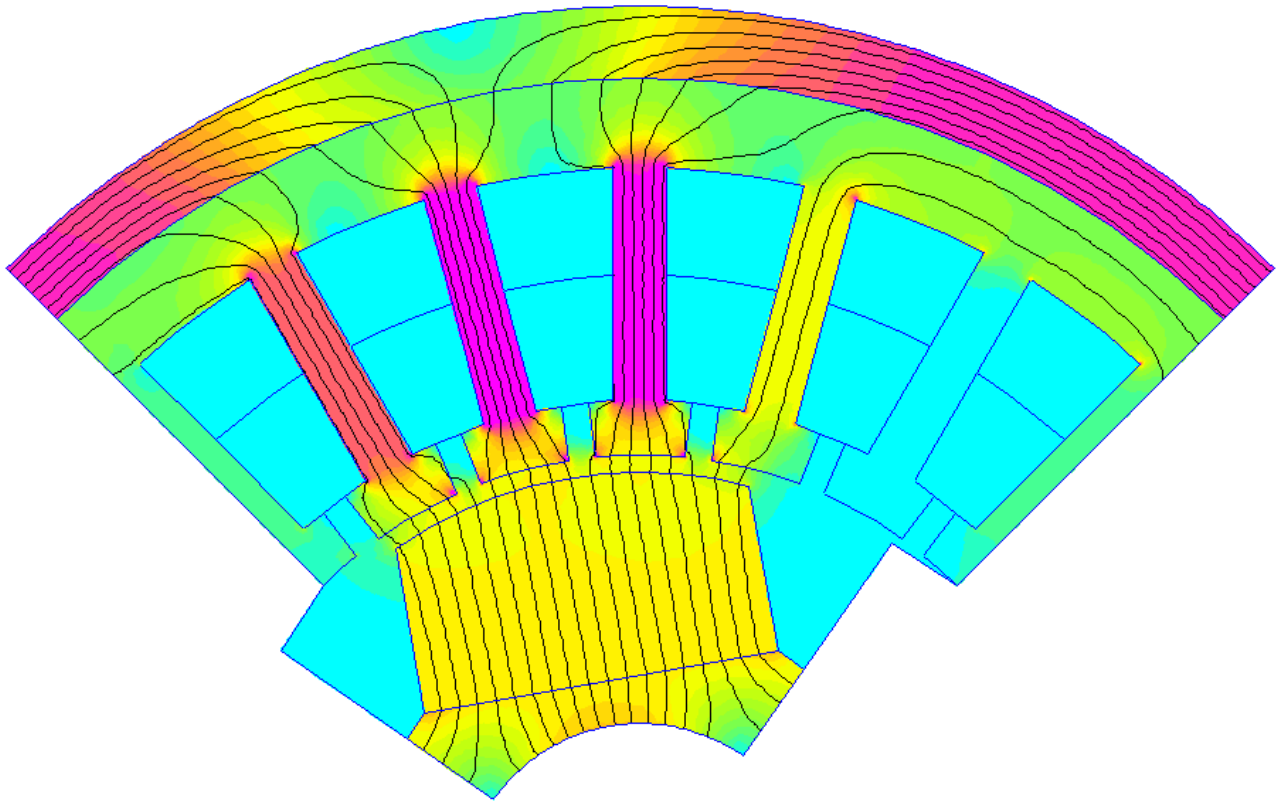
Método dos elementos finitos aplicado à simulação de máquinas elétricas



Introdução

- O método dos elementos finitos é uma ferramenta para a solução numérica de problemas:
  - Descritos por equações diferenciais elaboradas
  - Delimitados por condições de contorno complexas
  - Com domínio de solução irregular

- É aplicável a problemas eletromagnéticos, dentre eles:
  - Magnetostáticos
  - Eletrostáticos
  - Magnéticos harmônicos
  - Elétricos harmônicos
  - Fluxo de corrente

Eletromagnetismo
Equações dos campos eletromagnéticos

Equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Relações constitutivas

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

- Estabelecem relações entre os campos eletromagnéticos no domínio espaço-temporal do problema
- Constituem um sistema de equações diferenciais parciais
- Solução analítica não é prática para problemas reais

Eletromagnetismo
Grandezas derivadas dos campos

- Diversas grandezas de interesse são calculadas pelos campos obtidos pelas equações de Maxwell, como:

Energia e co-energia do campo magnético

$$W = \int_0^B \int H(B')dB'dV \qquad W_c = \int_0^H \int B(H')dH'dV$$

Força de Lorentz

$$\mathbf{F_{Lorentz}} = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \qquad \mathbf{F_{Lorentz}} = \frac{W_c(p+\delta) - W_c(p)}{\delta}$$

Auto-indutância e indutância mútua

$$L = \frac{\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV}{i^2} \qquad L_{\text{mútua}} = \frac{\int \mathbf{A_1} \cdot \mathbf{J_2} dV_2}{i_1 i_2}$$

onde

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Equações diferenciais
Condições de contorno comuns

- **Neumann** (ou primeiro tipo)
  - Especifica o valor da solução na fronteira.

$$\phi(x) = f(x), x \in \Omega$$

- **Dirichlet** (ou segundo tipo)
  - Especifica o valor da derivada da solução na fronteira.

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = f(x), x \in \Omega$$

- **Robin** (ou terceiro tipo)
  - Especifica o valor de uma combinação linear da solução e de sua derivada na fronteira

$$f(x)\phi(x) + g(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = h(x), x \in \Omega$$

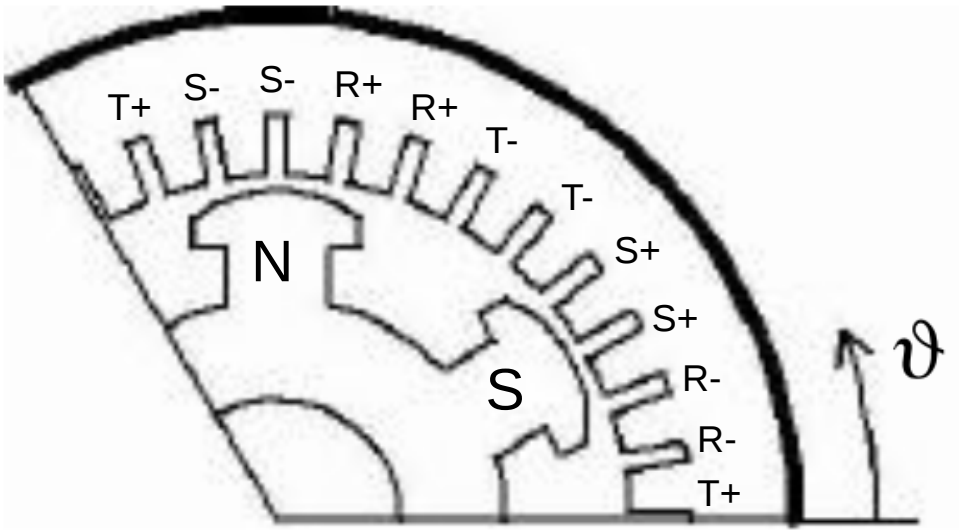
Equações diferenciais
Condições de contorno periódicas

- Impõem o mapeamento entre distintas fronteiras do problema

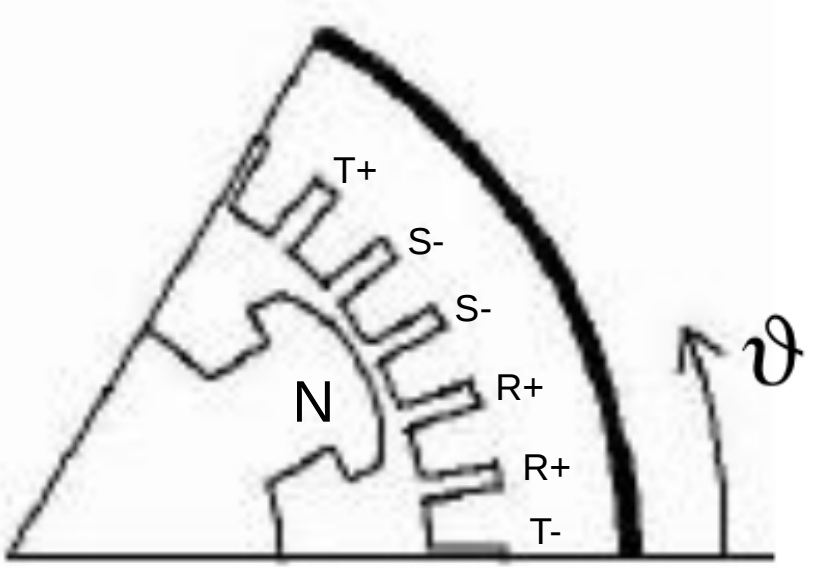
$$\phi(x_{sec}) = f(\phi(x_{pri}))$$

- Permitem a redução do domínio de solução pelo aproveitamento de simetrias do problema

Periódica par (periódica)



Períodica ímpar (anti-periódica)



Equações diferenciais
Aproximação por método de Galerkin

Dada uma equação diferencial genérica:

$$L[y(x), x] = 0$$

Assume-se uma aproximação da solução como uma combinação linear de funções da base $\Phi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$.

$$y(x) \approx \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$$

Conforme o método de Galerkin, os coeficientes c_i são determinados pela solução do seguinte sistema:

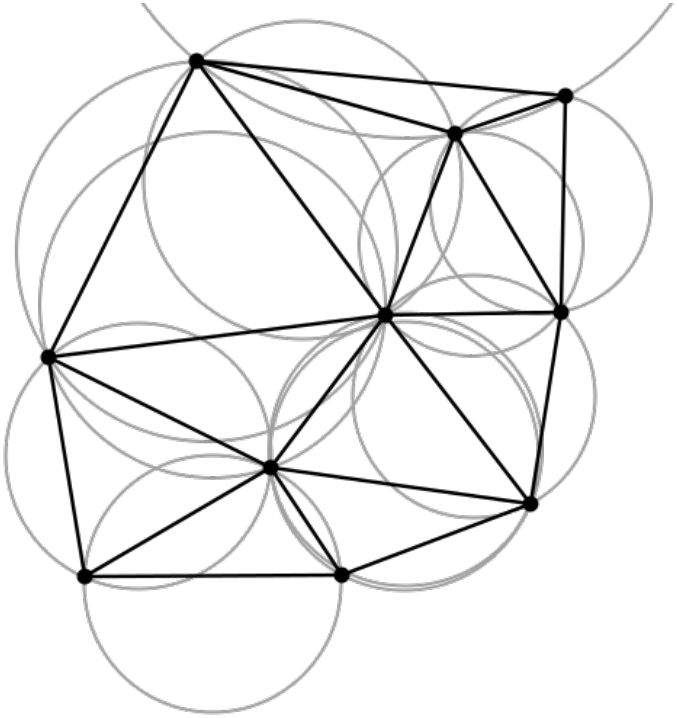
$$\int_{\Omega} \phi_j(x) L\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x), x\right] dx = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

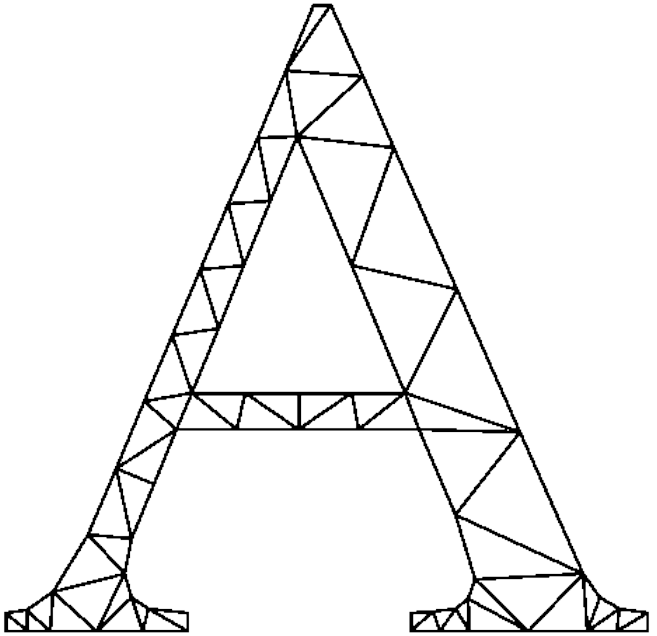
Método dos elementos finitos
Introdução

- **Enunciado do problema**
  - A aplicação do método de Galerkin a problemas complexos requereria uma base de funções muito complexa
- **Proposta de solução (método dos elementos finitos)**
  - Subdivisão do domínio em um número finito de elementos pequenos, mapeáveis por funções interpoladoras simples
- **Etapas da resolução**
  - Partição do domínio (Delauney)
  - Seleção de funções interpoladoras (lineares)
  - Formulação do sistema de equações (Galerkin ou variacional)
  - Resolução do sistema (gradientes conjugados)

Método dos elementos finitos
Triangulação de Delauney

- Procedimento de divisão do domínio de solução em um número finito de pequenos elementos triangulares
- Método de Delauney é o mais comumente usado
  - Maximiza o menor dos ângulos de todos os triângulos
  - Nenhum circulo circunscrito contêm vértices em seu interior

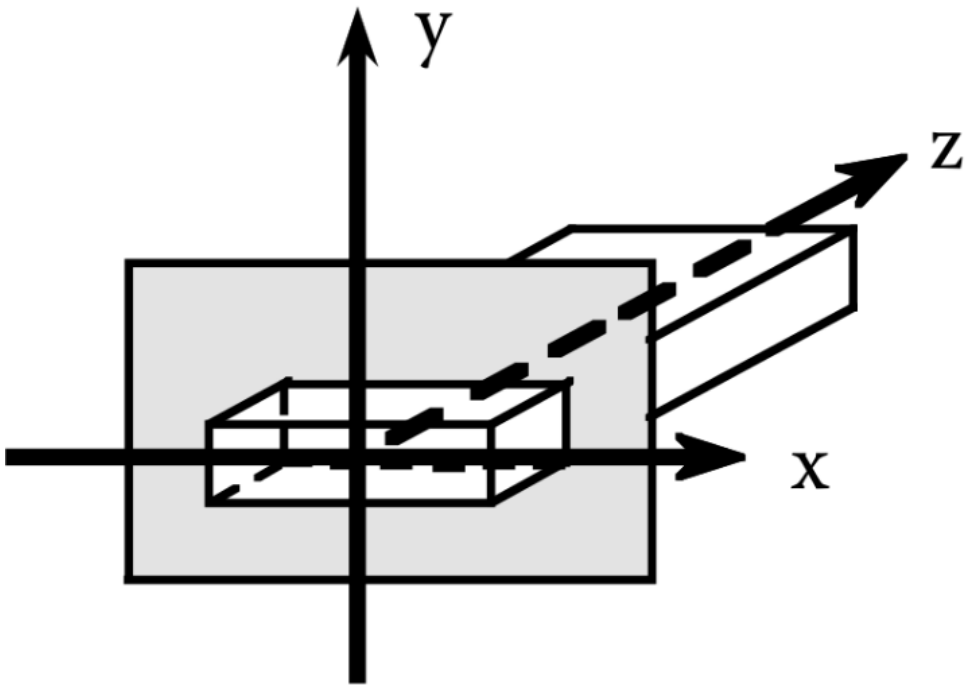




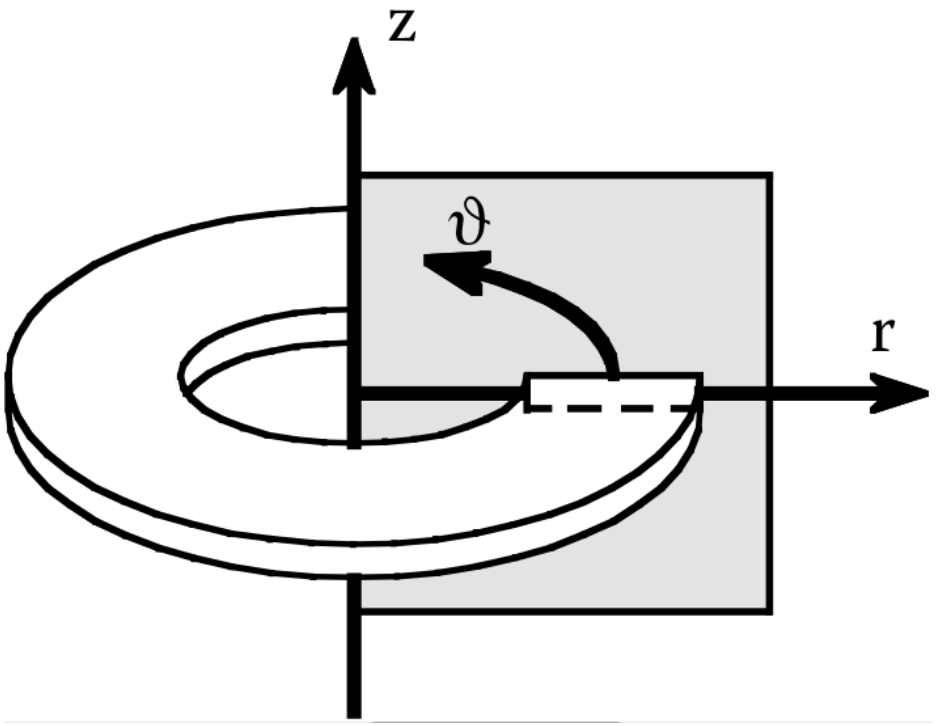
Método dos elementos finitos
Solução 2D de problemas 3D

- Problemas tridimensionais podem ser reduzidos a bidimensionais se apresentam alguma destas simetrias:

Problemas planares



Problemas axi-simétricos



Programa FEMM
Introdução

- Programa para simulação de problemas eletromagnéticos e térmicos com o método dos elementos finitos
- Formulação bidimensional, mas aplica-se a problemas tridimensionais com simetrias planares e axiais.
- Nativo do Windows, e funciona em Linux com o Wine.
- Possui código-fonte aberto (em linguagem C++)

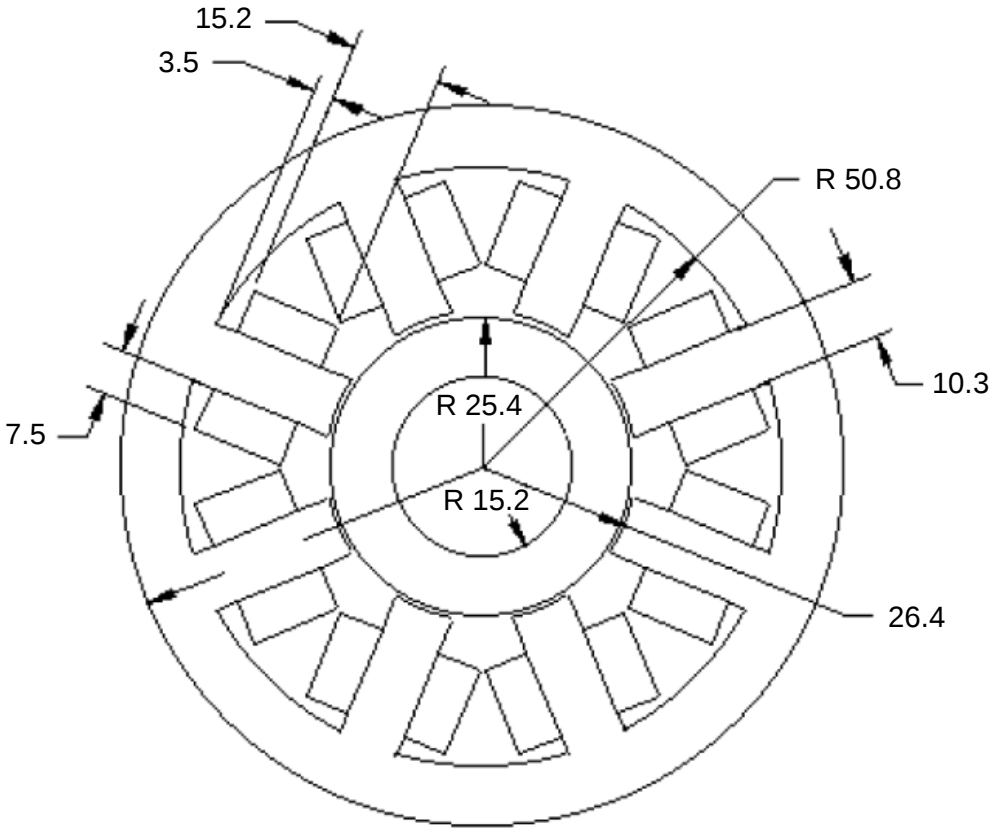
- Interfaces
  - Lua (nativo)
  - C++ (biblioteca xfemm)
  - ActiveX
  - Arquivos
  - Mathematica
  - MATLAB
  - Octave
  - SciLab

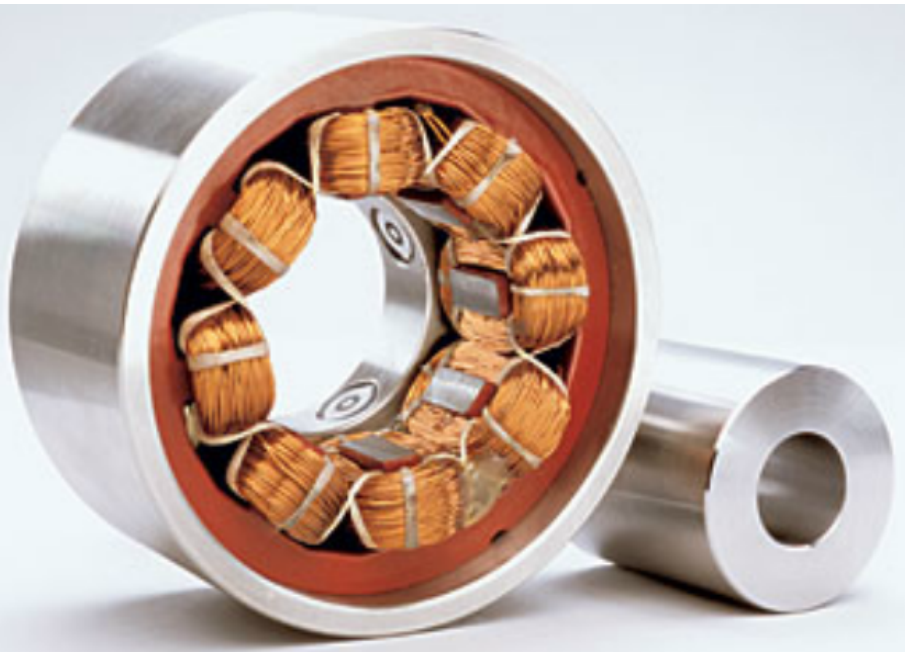
Programa FEMM
Comandos básicos

- **Mouse (na área de desenho)**
  - Botão direito: insere novo objeto
  - Botão esquerdo: seleciona objeto mais próximo
- **Teclado**
  - Tab: tela de inserção de coordenadas de um novo nó ou rótulo
  - Espaço: abre tela de propriedades do(s) objeto(s) selecionados
  - Delete: remove os objetos selecionados
  - Esc: anula a seleção de todos os objetos
  - Setas direcionais: navegação na área de desenho
  - Page Up / Page Down: Aumenta / diminuir a ampliação (zoom)
  - Home: Restaura a ampliação (zoom)

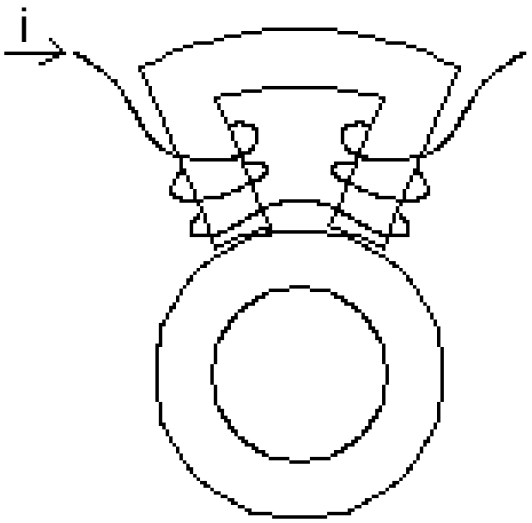
FEMM – Mancal magnético radial
Introdução

- Mantêm eixos horizontais de máquinas em suspensão magnética
- Atuam por quatro circuitos eletromagnéticos (x-, x+, y-, y+)
- Detectam a posição do eixo por sensores
- Controle elétrico atua nos solenoides para centralizar o eixo





FEMM – Mancal magnético radial
Equacionamento simplificado

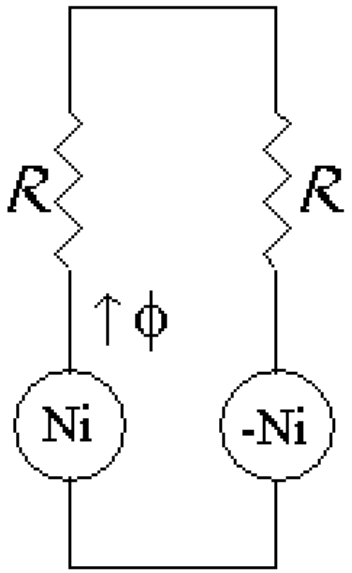


Pelo circuito magnético:

$$\phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}}$$ com a relutância R dada por $$\mathcal{R} = \frac{g}{\mu_0 A}$$

Da definição de fluxo magnético:

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{\mu_0 N i}{g}$$, que implica em: $$i = \frac{Bg}{\mu_0 N}$$



A força de atração no entreferro é: $$F_{entreferro} = \frac{B^2 A}{2\mu_0}$$

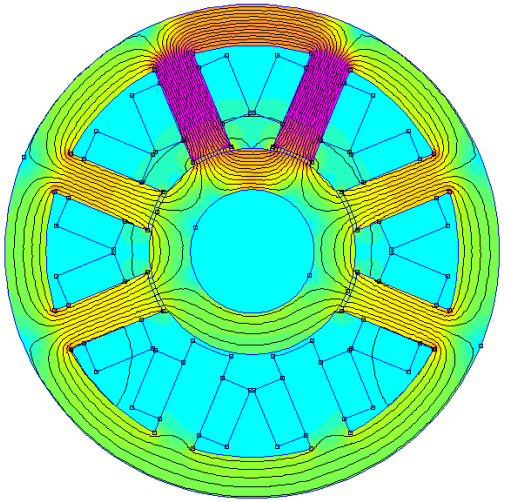
A força de atração é:

$$F_{ferradura} = 2\cos\theta\ F_{entreferro} = \frac{B^2 A}{\mu_0}\cos\theta$$

A indutância na ferradura é:

$$L_{ferradura} = \frac{\Lambda}{i} = \frac{2N\phi}{i} = \frac{2\mu_0 N^2 A}{g}$$

FEMM – Mancal magnético radial
Simulação por elementos finitos



Pelo modelo analítico:
- Campo de saturação magnética do núcleo de ferro de 1.2 T
- Estima-se a corrente máxima corrente de operação em 12 A

Simula-se a seguinte configuração:
- Corrente máxima de 12 A na ferradura superior
- Corrente de polarização de 6 A nas ferraduras laterais
- Corrente nula na ferradura inferior

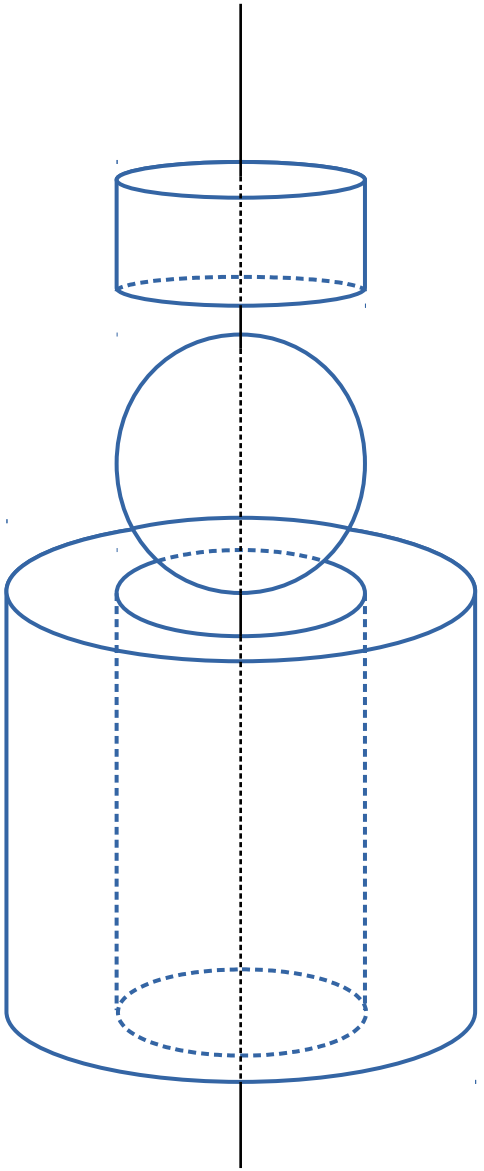
Resultados

	Solução analítica	Solução numérica
Força vertical	425 N	399 N
Indutância na ferradura superior	6.4 mH	8.9 mH

Conclusões

- Força obtida é 94% da estimada
- Redução devido a campos elevados nos ramos da ferradura superior (B > 1.6 T)
- Deve-se reprojetar o mancal

FEMM – Esfera atraída por ímã e solenoide
Enunciado do problema



Problema proposto

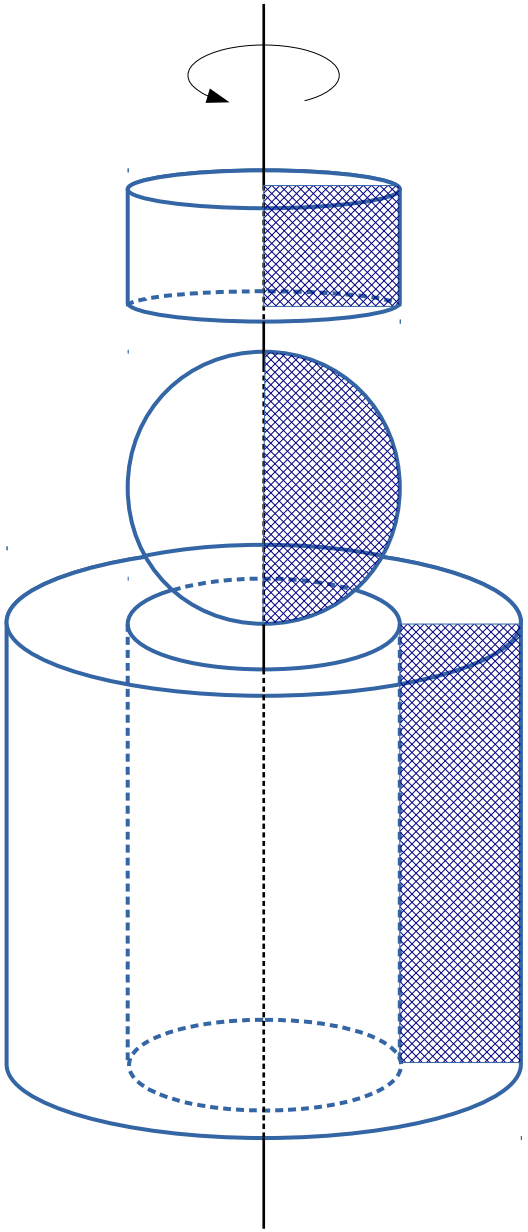
A figura ao lado representa uma esfera metálica atraída simultaneamente por um ímã de neodímio e um solenóide.

Para duas configurações distintas – com o polo norte do ímã para cima e para baixo, pede-se:

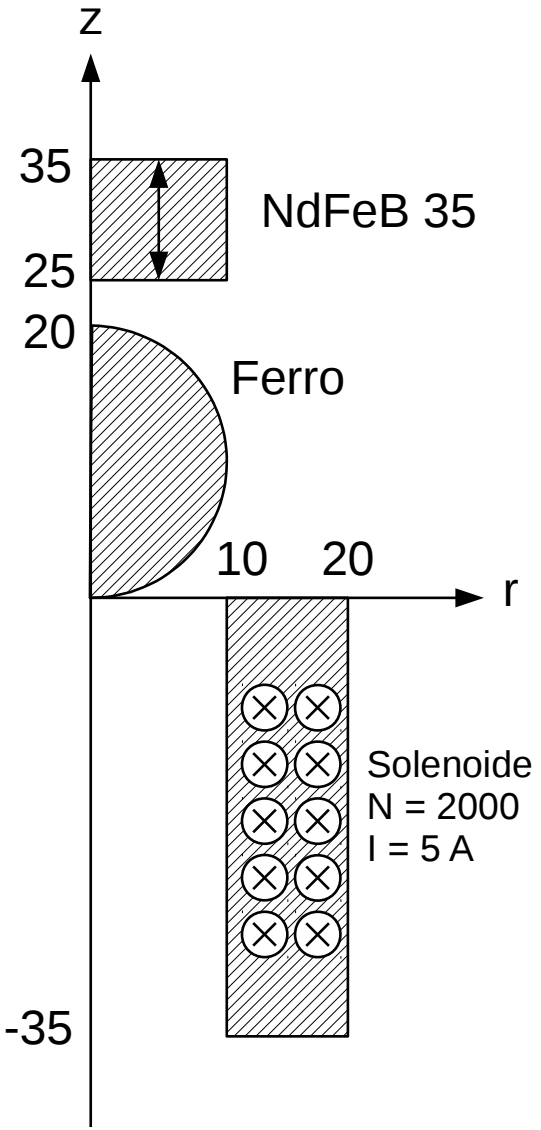
- Representar a intensidade do campo magnético no domínio do problema.
- Determinar as forças resultantes no ímã, no solenoide e na esfera.
- Determinar a resistência e a indutância do enrolamento do solenoide.

As dimensões estão na próxima página.

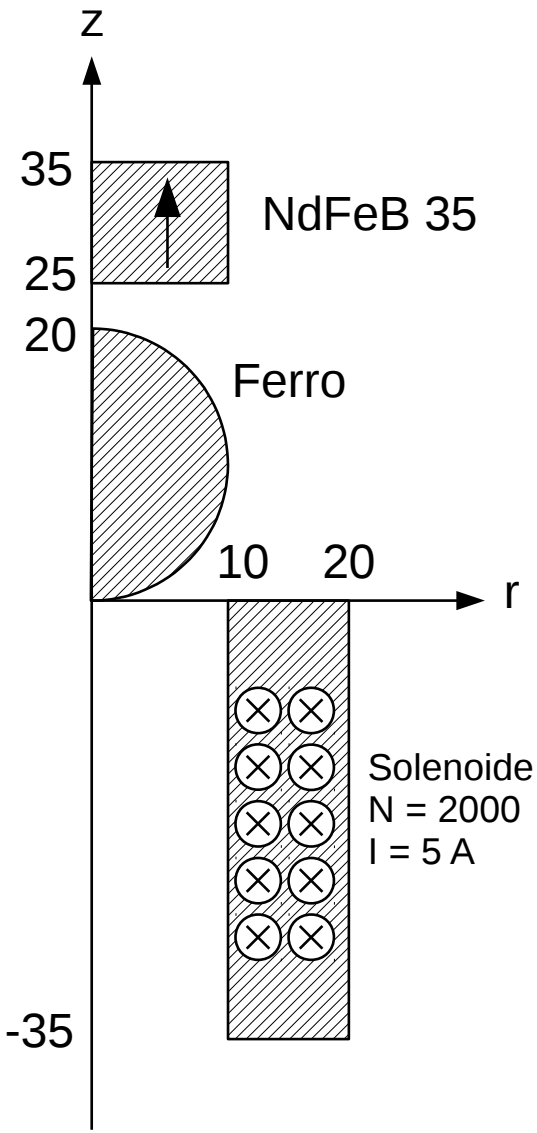
FEMM – Esfera atraída por ímã e solenoide
Transformação em problema 2D



Axi-simétrico

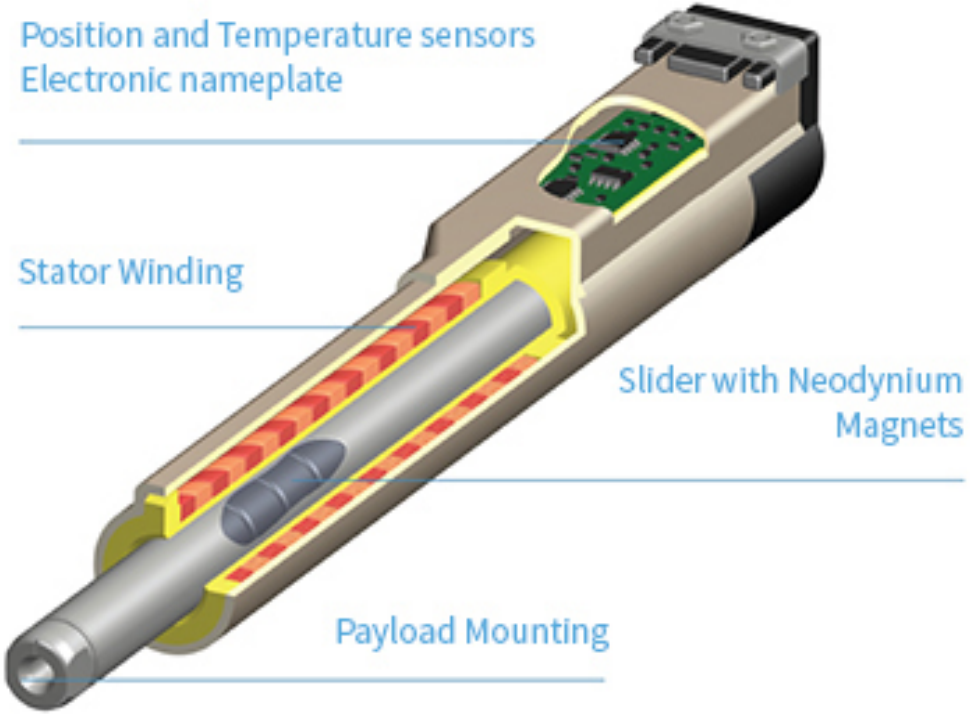


FEMM – Esfera atraída por ímã e solenoide
Resolução do problema



- Criar novo arquivo ( )
- Configurar problema (Problem)
- Adicionar materiais (Properties → Materials)
- Adicionar circuitos (Properties → Circuits)
- Adicionar cond. contorno (Properties → Boundary)
- Desenhar nós ( )
- Desenhar segmentos ( )
- Desenhar segmentos de arco ( )
- Desenhar contornos ( )
- Configurar condições de contorno (Selec. e Espaço)
- Desenhar rótulos ( )
- Configurar rótulos (Selecionar e Espaço)
- Gerar malha triangulada ( )
- Resolver numericamente ( )
- Abrir visualização de resultados ( )
- Representar campos ( )
- Calcular grandezas ( )

FEMM – Simulações adicionais
Motores rotativos e lineares

- Motor rotativo síncrono com ímãs permanente
- Problema planar
- Simplificável por condição periódica

- Motor linear tubular com ímãs permanentes
- Problema axi-simétrico
- Simplificável por condição periódica