

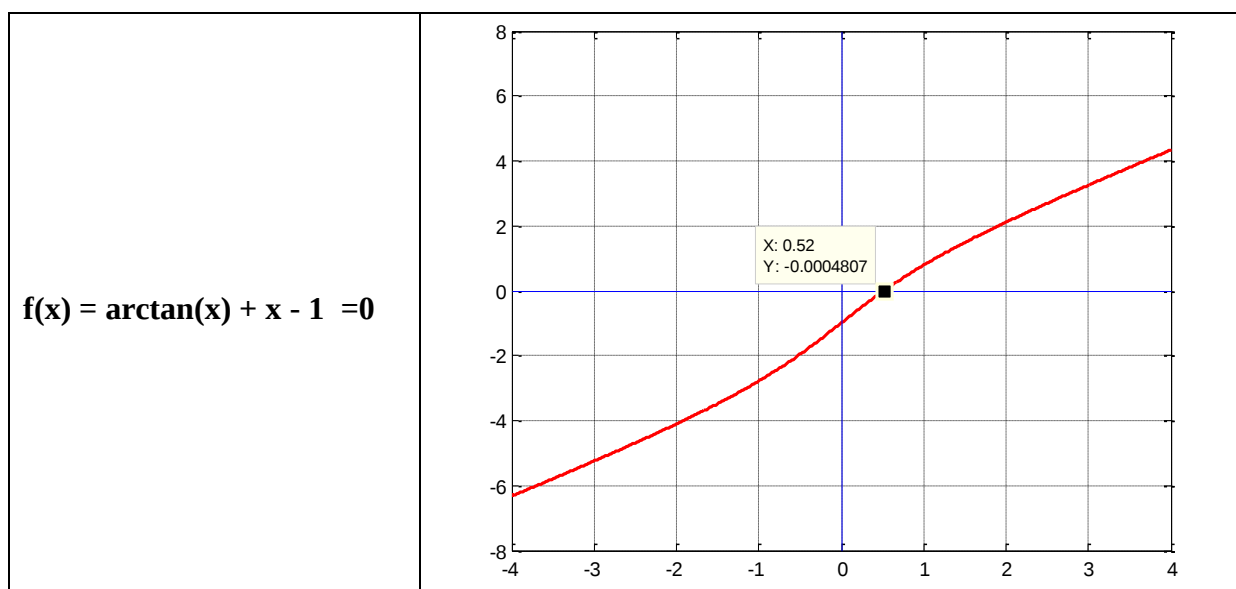
Métodos Numéricos para encontrar raízes de funções não-lineares

Após modelar o sistema de potência para encontrar o de fluxo de carga, o problema transforma-se em encontrar raízes de um conjunto de equações não lineares. Assim, nesta seção, apresentam-se dois métodos que são mais usados: o método de Gauss-Seidel e o método de Newton-Raphson.

A.1) Método de Gauss-Seidel:

O método de Gauss pode ser utilizado para encontrar raízes de uma equação, quando a variável em questão pode ser isolada.

Exemplo 1: Determine a raiz da função:



Colocando o termo x como evidência tem-se:

$$x = 1 - \arctan(x);$$

A partir desta equação, pode-se obter uma lei de atualização:

$$x^{k+1} = 1 - \arctan(x^k) \quad (1.1)$$

Partindo de um $x^0 = 0$, esta lei de atualização fará convergir ao valor desejado. Geralmente o critério de parada é definido como sendo $|x^{k+1} - x^k| < \text{tol}$; com $\text{tol} = 0.001$

k	x^k	x^{k+1}
0	0	1

1	1	0,2146
2	2	
...	...	...
30	0,5208	0,5199

Algoritmo:

- 1) Inicialize as variáveis: $x_0 = 0$; $tol = 0.001$; $maxite = 100$; $cont = 0$;
- 2) Avalie: $x_1 = 1 - \arctan(x_0)$; $cont = cont + 1$;
- 3) Se $cont > maxcont$; pare e mostre: ‘ não convergiu em $cont$ iterações’. Caso contrário vá para 4.
- 4) Se $|x_1 - x_0| < tol$; pare e mostre ‘convergiu’. Caso contrário faça $x_0 = x_1$ e vá para o passo 2.

Exemplo 2: Método de Gauss-Seidel para sistemas de equações lineares:

Dado o sistema de equações

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \quad (1.2a)$$

$$x_1 - 3x_2 = 2 \quad (1.2b)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 \quad (1.2c)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.2d)$$

ou $A \cdot x = b$

- A solução direta é obtida usando a inversa da matriz: $x_1 = 1$; $x_2 = -0.333$; $x_3 = -1.666$

- A solução por métodos iterativos pode ser obtida colocando em evidência x_1 , x_2 e x_3 a partir das equações (1.2a)-(1.2c).

$$x_1 = (1/2) \cdot (4 + x_2 + x_3)$$

$$x_2 = (-1/3) \cdot (-2 + x_1)$$

$$x_3 = (-1 - x_1 - x_2)$$

A partir destas equações, podem obter-se a lei de atualização:

$$x_1^{k+1} = (1/2) \cdot (4 + x_2^k + x_3^k) \quad (1.3a)$$

$$x_2^{k+1} = (-1/3) \cdot (-2 + x_1^k) \quad (1.3b)$$

$$x_3^{k+1} = (-1 - x_1^k - x_2^k); \quad (1.3c)$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N a_{in} x_n^k \right); \quad (1.4)$$

Sendo

a_{in} : elemento “in” da matriz A.

b_i : elemento “i” do vetor b.

N : Número de variáveis

$i = 1, 2, \dots, N$

A equação (1.4) descreve a solução de sistemas lineares por método de Gauss. O processo iterativo de Gauss pode ser acelerada utilizando as variáveis já atualizadas nas equações inferiores da seguinte forma:

$$x_1^{k+1} = (1/2) * (4 + x_2^k + x_3^k) \quad (1.5a)$$

$$x_2^{k+1} = (-1/3) * (2 - x_1^{k+1}) \quad (1.5b)$$

$$x_3^{k+1} = (-1 + x_1^{k+1} + x_2^{k+1}); \quad (1.5c)$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{n=1}^{i-1} a_{in} x_n^{k+1} - \sum_{n=i+1}^N a_{in} x_n^k \right); \quad (1.6)$$

A equação (1.6) descreve a solução pelo método de Gauss-Seidel.

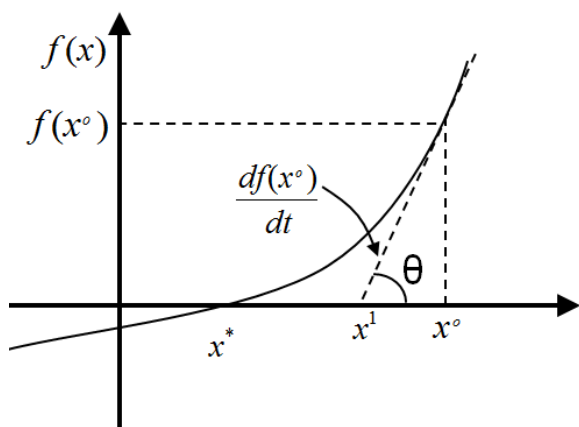
Na tabela abaixo é mostrado que pelo método de Gauss-Seidel, o processo toma 13 iterações, enquanto pelo método Gauss 49 iterações.

Método de Gauss				Método de Gauss-Seidel			
k	x ₁	x ₂	x ₃	k	x ₁	x ₂	x ₃
0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0,666	-1	1	2	0	3
...				...			
49	1,004	0,3335	-2,331	13	1	0,333	-2,333

A.2) Método de Newton-Raphson

O método leva o nome em honor a Issac Newton e Joseph Raphson. A grande vantagem deste método é a rápida convergência que faz que seja muito utilizado em muitas aplicações em que se deseje encontrar raízes de uma equação não linear.

A dedução da formula do método de Newton Raphson pode ser obtida em forma geométrica ou por expansão de séries de Taylor.



Dada a função $f(x)$, deseja-se encontrar valor de x que zere a função. Ou seja:

$$f(x^*) = 0;$$

Partindo de uma estimativa inicial x^0 , pode se encontrar uma nova estimativa x^1 usando o triângulo de linhas tracejadas da figura:

$$\begin{aligned}\tan(\theta) &= [f(x^0) - f(0)] / [x^0 - x^1] \\ &= f(x^0) / [x^0 - x^1]\end{aligned}$$

Do cálculo diferencial, sabe-se que a inclinação da reta tangente que passa por x^0 , é igual a derivada nesse ponto. Então

$$\frac{df(x^0)}{dx} = \frac{f(x^0)}{x^0 - x^1}; \text{ colocando } x^1 \text{ em evidência, tem-se:}$$

$$x^1 = x^0 - \left(\frac{df(x^0)}{dx} \right)^{-1} f(x^0) \quad (1.7)$$

A equação (1.7) descreve a lei de atualização que pode ser aplicada sucessivamente até encontrar a raiz.

Para um sistema de dimensão N , a equação (1.7) transforma-se em:

$x^{k+1} = x^k - \left(Jac_{F(x)} \right)^{-1} F(x) \Big _{x^k} \quad (1.7)$	Sendo: $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T;$ $F(x) = [f_1(x), f_2(x) \dots f_N(x)]^T;$ Jac é a matriz Jacobiana: $Jac_{F(x)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_N(x)}{\partial x_N} \end{bmatrix}$
---	---

Na aplicação em sistemas de potência, o número de variáveis a serem encontradas depende do número de barras que está na ordem de centenas de barras, então, a inversa da matriz

Jacobiana não é calculada e métodos de triangularização são utilizados como, por exemplo, o método de triangularização de Gauss-Jordam. A equação (1.7) pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Jac_{F(x)} \Delta x &= -F(x) \\ x^{k+1} &= x^k + \Delta x \end{aligned} \quad (1.8)$$

Da mesma forma que no método de Gauss-Seidel, também é comum definir um critério de convergência:

$$\max |x_i^{k+1} - x_i^k| < tol \quad \text{ou} \quad \max |f_i(x^{k+1})| < tol; \quad i=1,2,\dots,N$$

A segunda forma é mais utilizada como critério de convergência.

Exemplo 3: Encontre a raiz de $f(x) = \arctan(x) + x - 1$ e compare com o método de Gauss desenvolvido no exemplo 1.

$$f(x) = \arctan(x) + x - 1 = 0$$

$$df(x)/dt = 1/(1+x^2) + 1;$$

Algoritmo:

- 1) Inicialize as variáveis: $x_0 = 0$; $tol = 0.001$; $maxite = 20$; $cont = 0$;
- 2) Avalie: $x_1 = x_0 - inv(df(x_0)/dt) * f(x_0)$; $cont = cont + 1$;
- 3) Se $cont > maxcont$; pare e mostre: ‘ não convergiu em $cont$ iterações’. Caso contrário vá para 4.
- 4) Se $|f(x_1)| < tol$; pare e mostre ‘convergiu’. Caso contrário faça $x_0 = x_1$ e vá para o passo 2.

k	x^k	$f(x^k)$	$df(x^k)/dt$	x^{k+1}	$ f(x^k) < tol$
0	0	-1	2	0.5	Não
1	0.5	-0.0364	1.8	0.5202	Não
2	0.502	-0.0001	1.7870	0.5203	Sim

Exemplo 4: Método de Newton-Raphson multivariável.

Condições Iniciais

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_2 \sin x_1 + 0,6 \\ 4x_2^2 - 4x_2 \cos x_1 + 0,3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A matriz Jacobiana é determinada derivando parcialmente as funções em relação às variáveis.

$$J_F = \frac{\partial F_{2 \times 1}}{\partial x_{2 \times 1}} \bigg|_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

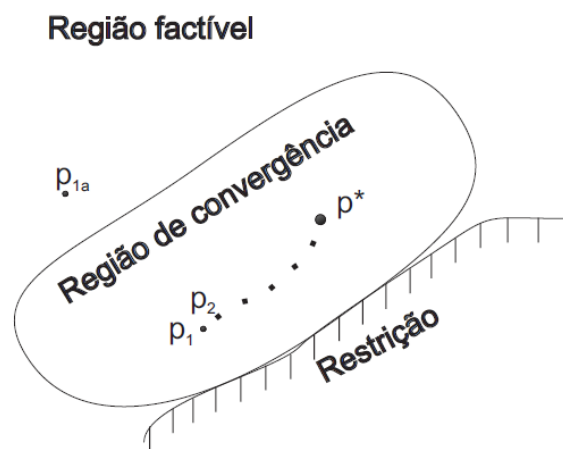
$$Jac(F(x)) = \begin{pmatrix} 4x_2 \cos(x_1) & 4\sin(x_1) \\ 4x_2 \sin(x_1) & 8x_2 - 4\cos(x_1) \end{pmatrix}$$

k	x^k	$F(x^k)$	$Jac(F(x))$	x^{k+1}	$\max f_i(x^k) < to$ l
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,15 \\ 0,9250 \end{pmatrix}$	Não
1	$\begin{pmatrix} -0,15 \\ 0,9250 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,04708 \\ 0,06405 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3,658 & -0,5977 \\ -0,5529 & 3,4449 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,1663 \\ 0,9037 \end{pmatrix}$	Não
2	$\begin{pmatrix} -0,1663 \\ 0,9038 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0014 \\ 0,0021 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3,5653 & -0,5229 \\ -0,5978 & 3,2855 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,1669 \\ 0,9031 \end{pmatrix}$	Não
3	$\begin{pmatrix} -0,1669 \\ 0,9031 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0001 \\ 0,0001 \end{pmatrix}$			Sim

A.3.1) Região de convergência:

O método de Newton-Raphson é um método local para encontrar raízes de uma equação não linear. Portanto, o sucesso da estimação só pode ser garantido se o valor inicial da raiz (x_0),

denominada “estimativa inicial” ou “chute inicial”, estiver próximo do valor real (x^*). Caso contrário, o método pode convergir a um valor diferente ou até mesmo divergir. Pode definir-se então uma “região de convergência” (Cari, 2009) como sendo o espaço nas variáveis x , que dado que o método comece dentro dessa região, a estimação do valor verdadeiro é garantido. Na Figura a seguir, foi representada a região de convergência de um sistema bidimensional. Observa-se que, dentro da região de convergência, começando de p_1 , o método converge ao valor verdadeiro p^* . Por outro lado começando de p_{1a} , que se encontra fora da região de convergência, o método não convergirá ao valor verdadeiro. A figura também mostra que existe uma região factível e uma região de restrição em aplicações reais. Por exemplo, uma restrição poderia ser que o valor inicial não pode ser negativo.



Afortunadamente, nas aplicações em fluxo de carga em sistemas de potência, um valor inicial próximo do verdadeiro sempre é disponível desde que as tensões em p.u. em todas as barras sempre são próximas em pontos de operação normal, portanto, o método de Newton Raphson é amplamente utilizado nos programas comerciais.